Operations Research

Johannes Antweiler

10. Juni 2015

Übung L1

Einem Haushalt steht ein Budget von 1280 € zur Verfügung. Der Haushalt konsumiert die Gütermengen x_1 bzw. x_2 der Güter 1 bzw. 2. Der Preis für eine Mengeneinheit des Gutes 1 beträgt 16 €; eine Mengeneinheit des Gutes 2 kostet 32 €. Der Nutzen, den der Haushalt aus dem Konsum zieht, wird durch die Funktion $N = x_1 \cdot x_2$ beschrieben. Bestimmen Sie die Mengen x_1, x_2, deren Konsum die angegebene Nutzenfunktion maximiert, wenn das Budget vollständig ausgegeben wird. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Formulieren Sie das Optimierungsproblem.

b) Stellen Sie die zugehörige Lagrangefunktion auf.

c) Bestimmen Sie sämtliche kritischen Punkte.

Lösung Extrema unter Nebenbedingungen - LAGRANGE

Diese Übung haben wir in der Vorlesung behandelt.

Übung L2

Das Budget eines Haushaltes beträgt a € mit $a > 0$ .Von dem Haushalt werden die Gütermengen x_1 bzw. x_2 der Güter 1 bzw. 2 konsumiert. Eine Mengeneinheit des Gutes 1 kostet 9 €; eine Mengeneinheit des Gutes 2 kostet 16 €. Der Konsumnutzen des Haushaltes wird durch die Funktion $N(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2$ annährend beschrieben. Bestimmen Sie die Mengen x_1, x_2, deren Konsum die angegebene Nutzenfunktion maximiert, wenn das Budget vollständig ausgegeben wird. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Formulieren Sie das Optimierungsproblem.

b) Stellen Sie die zugehörige Lagrangefunktion auf. Verzichten Sie dabei auf die Nichtnegativitätsbedingung.

c) Bestimmen Sie sämtliche kritischen Punkte.

Lösung Extrema unter Nebenbedingungen - LAGRANGE

a) Das Optimierungsproblem lautet:

$$\begin{array}{rlcl} max & N(x_1, x_2) = x_1^2 \cdot x_2 & & \\ u.d.N. & 9x_1 + 16x_2 = a & \Leftrightarrow & a - 9x_1 - 16x_2 = 0 \\ NNB. & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

b) Die LAGRANGEfunktion ist die Zielfunktion plus das λ-fache der umgeformten Nebenbedingung:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 \cdot x_2 + \lambda \cdot (a - 9x_1 - 16x_2)$$

c) Zur Bestimmung sämtlicher kritischen Punkte benötigt man alle partiellen Ableitungen der LAGRANGE-Funktion:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 \cdot x_2 + \lambda \cdot (a - 9x_1 - 16x_2)$$

$$\begin{aligned} L'_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= 2x_1x_2 - 9\,\lambda \\ L'_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= x_1^2 - 16\,\lambda \\ L'_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) &= a - 9x_1 - 16x_2 \end{aligned}$$

Diese partiellen Ableitungen müssen nun gleich Null gesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
L'_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= 2x_1x_2 - 9\,\lambda &\overset{!}{=}\; 0 \qquad (I)\\
L'_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= x_1^2 - 16\,\lambda &\overset{!}{=}\; 0 \qquad (II)\\
L'_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) &= a - 9x_1 - 16x_2 &\overset{!}{=}\; 0 \qquad (III)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2x_1x_2 - 9\,\lambda &= 0 \qquad (I)\\
x_1^2 - 16\,\lambda &= 0 \qquad (II)\\
a - 9x_1 - 16x_2 &= 0 \qquad (III)
\end{aligned}
$$

Lösen wir nun (II) nach λ auf, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
x_1^2 - 16\,\lambda &= 0 \qquad \Leftrightarrow\\
16\,\lambda &= x_1^2 \qquad \Leftrightarrow\\
\lambda &= \frac{1}{16}x_1^2
\end{aligned}
$$

Dieses setzen wir nun in (I) ein und erhalten

$$2x_1x_2 - 9\cdot\frac{1}{16}x_1^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x_1x_2 - \frac{9}{16}x_1^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1(2x_2 - \frac{9}{16}x_1) = 0$$

$$x_1(2x_2 - \frac{9}{16}x_1) = 0$$

Hieraus ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

$$\underline{\text{Fall 1}}: \boxed{x_1 = 0} \qquad \vee \qquad \underline{\text{Fall 2}}: 2x_2 - \frac{9}{16}x_1 = 0$$

$$2x_2 = \frac{9}{16}x_1$$

$$\boxed{x_2 = \frac{9}{32}x_1}$$

Wir setzen jetzt beide Fälle nacheinander in (III) ein.

<u>Fall 1</u>: Einsetzen von $\boxed{x_1 = 0}$ in (III) liefert

$$a - 9x_1 - 16x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a - 16x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_2 = \frac{1}{16}a}$$

Damit erhalten wir den ersten kritischen Punkt:

$$\boxed{(x_1, x_2) = \left(0,\ \frac{1}{16}a\right)}$$

<u>Fall 2</u> : Einsetzen von $\boxed{x_2 = \frac{9}{32}\,x_1}$ in (III) liefert

$$a - 9x_1 - 16x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 9x_1 + 16 \cdot \frac{9}{32}x_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$a = 9x_1 + \frac{9}{2}x_1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{27}{2}x_1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_1 = \frac{2}{27}\,a}$$

Zusammengenommen ergibt sich

$$x_2 = \frac{9}{32}x_1 = \frac{9}{32} \cdot \frac{2}{27}\,a = \frac{1}{32} \cdot \frac{2}{3}\,a = \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3}\,a = \frac{1}{48} \cdot a$$

Damit erhalten wir den zweiten kritischen Punkt:

$$\boxed{(x_1, x_2) = \left(\frac{2}{27}\,a,\ \frac{1}{48}\,a\right)}$$

Übung L3

Sie haben sich um einen Platz in einer Dreier-WG beworben. Die beiden anderen Mitbewohner sind ein Student der Mathematik und ein Student der Wirtschaftsinformatik. Als Aufnahmeprüfung stellen Ihnen die beiden folgende Aufgabe:

Das Budget für die nächste Studentendorfparty beträgt 2250 €. Hiervon sollen Cracker (Gut mit der Variablen x_1) und Bier (Gut mit der Variablen x_2) eingekauft werden. Eine Karton Cracker kostet 6 €; eine Kiste Bier kostet 10 €. Der Konsumnutzen für die Party wird laut der beiden Studenten durch der Funktion $N(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1x_2^2$ annährend beschrieben.
Bestimmen Sie die Mengen x_1, x_2, deren Konsum die angegebene Nutzenfunktion maximiert, wenn das Budget vollständig ausgegeben wird. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Formulieren Sie das nicht-lineare Optimierungsproblem.

b) Stellen Sie die zugehörige Lagrangefunktion auf. Verzichten Sie dabei auf die Nichtnegativitätsbedingung.

c) Bestimmen Sie **alle** kritischen Punkte und geben Sie jeweils den Lagrange-Multiplikator an.

Lösung Extrema unter Nebenbedingungen - LAGRANGE

a) Das Optimierungsproblem lautet:

$$\begin{array}{lllll} max & N(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 \cdot x_2^2 & & \\ u.d.N. & 6x_1 + 10x_2 = 2250 & \Leftrightarrow & 2250 - 6x_1 - 10x_2 = 0 \\ NNB. & x_1, x_2 \geq 0 & & \end{array}$$

b) Die LAGRANGEfunktion ist die Zielfunktion plus das λ-fache der umgeformten Nebenbedingung:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \frac{1}{2}x_1 \cdot x_2^2 + \lambda \cdot (2250 - 6x_1 - 10x_2)$$

c) Zur Bestimmung sämtlicher kritischen Punkte benötigt man alle partiellen Ableitungen der LAGRANGE-Funktion:

$$
\begin{aligned}
L(x_1, x_2, \lambda) &= \frac{1}{2}x_1 \cdot x_2^2 + \lambda \cdot (2250 - 6x_1 - 10x_2) \\
L'_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= \frac{1}{2}x_2^2 - 6\,\lambda \\
L'_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= x_1 \cdot x_2 - 10\,\lambda \\
L'_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) &= 2250 - 6x_1 - 10x_2
\end{aligned}
$$

Diese partiellen Ableitungen müssen nun gleich Null gesetzt werden:

$$
\begin{aligned}
L'_{x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= \frac{1}{2}x_2^2 - 6\,\lambda &\overset{!}{=} 0 \qquad &(I) \\
L'_{x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= x_1 \cdot x_2 - 10\,\lambda &\overset{!}{=} 0 \qquad &(II) \\
L'_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda) &= 2250 - 6x_1 - 10x_2 &\overset{!}{=} 0 \qquad &(III)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}x_2^2 - 6\,\lambda &= 0 \qquad &(I) \\
x_1 \cdot x_2 - 10\,\lambda &= 0 \qquad &(II) \\
2250 - 6x_1 - 10x_2 &= 0 \qquad &(III)
\end{aligned}
$$

Lösen wir nun (I) nach λ auf, so erhalten wir

$$
\frac{1}{2}x_2^2 - 6\,\lambda = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}x_2^2 = 6\,\lambda \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\lambda = \frac{1}{12}x_2^2}
$$

Dieses setzen wir nun in (II) ein und erhalten

$$
x_1x_2 - 10 \cdot \frac{1}{12}x_2^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1x_2 - \frac{5}{6}x_2^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_2(x_1 - \frac{5}{6}x_2) = 0
$$

$$
x_2(x_1 - \frac{5}{6}x_2) = 0
$$

Hieraus ergibt sich folgende Fallunterscheidung:

<u>Fall 1</u> : $\boxed{x_2 = 0}$ $\quad\vee\quad$ <u>Fall 2</u> : $x_1 - \frac{5}{6}x_2 = 0$

$$
\frac{5}{6}x_2 = x_1
$$

$$\boxed{x_2 = \frac{6}{5} x_1}$$

Wir setzen jetzt beide Fälle nacheinander in (III) ein.

<u>Fall 1</u> : Einsetzen von $\boxed{x_2 = 0}$ in (III) liefert

$$2250 - 6x_1 - 10x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2250 - 6x_1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_1 = 375}$$

Damit erhalten wir den ersten kritischen Punkt:

$$\boxed{(x_1, x_2) = (375,\ 0)}$$

Für den zugehörigen LAGRANGE-Multiplikator ergibt

sich wegen $\boxed{\lambda = \frac{1}{12} x_2^2}$: $\quad \boxed{\lambda = 0}$

<u>Fall 2</u> : Einsetzen von $\boxed{x_2 = \frac{6}{5} x_1}$ in (III) liefert

$$2250 - 6x_1 - 10x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2250 = 6x_1 + 10 \cdot \frac{6}{5} x_1 \quad \Leftrightarrow$$

$$2250 = 6x_1 + 12x_1 \quad \Leftrightarrow \quad 2250 = 18x_1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_1 = 125}$$

Zusammengenommen ergibt sich

$$x_2 = \frac{6}{5} x_1 = \frac{6}{5} \cdot 125 = 150$$

Damit erhalten wir den zweiten kritischen Punkt:

$$\boxed{(x_1, x_2) = (125,\ 150)}$$

Für den zugehörigen LAGRANGE-Multiplikator ergibt

sich wegen $\boxed{\lambda = \frac{1}{12} x_2^2}$: $\quad \boxed{\lambda = \frac{1}{12} 150^2 = 1875}$

Übung L4

Das Budget eines Haushaltes beträgt 2.200 €. Von dem Haushalt werden die Mengen x_1 bzw. x_2 der Güter 1 bzw. 2 konsumiert. Eine Mengeneinheit des Gutes 1 kostet 2 €; eine Mengeneinheit des Gutes 2 kostet 3 €. Zudem sind die beiden Güter voneinander abhängig, sodass sie nur in einem festen Mengenverhältnis von $\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{3}$ konsumiert werden können. Der Konsumnutzen des Haushaltes wird durch die Funktion

$$N(x_1, x_2) = 2.500 - \frac{1}{75} \cdot x_1 \cdot x_2$$

annähernd beschrieben. Bestimmen Sie die Mengen x_1, x_2, deren Konsum die angegebene Nutzenfunktion maximiert, wenn das Budget vollständig ausgegeben und das Mengenverhältnis berücksichtigt wird. Gehen Sie dabei wie folgt vor:

a) Überführen Sie zunächst das angegebene Verhältnis der Güter 1 und 2 in eine lineare Nebenbedingung.

b) Formulieren Sie nun das vollständige nicht-lineare Optimierungsproblem.

c) Stellen Sie die zugehörige Lagrangefunktion $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$ auf. Verzichten Sie in dieser Teilaufgaben auf die Nichtnegativitätsbedingung.

d) Geben Sie **alle** ersten partiellen Ableitungen der Lagrangefunktion $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$ an.

e) Zeigen Sie einen Rechenweg auf, der zum Auffinden des kritischen Punktes $\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} 200 \\ 600 \end{pmatrix}$ der Lagrangefunktion $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$ erforderlich ist.

f) Berechnen Sie die zum kritischen Punkt $\mathbf{x}^*$ zugehörigen Lagrange-Multiplikatoren λ_1 und λ_2.

Lösung Extrema unter Nebenbedingungen - LAGRANGE

a) Das angegebene Mengenverhältnis lautet:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{1}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x_1 = 1x_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x_1 - x_2 = 0$$

b) Das Optimierungsproblem lautet:

$$\begin{array}{ll} max & N(x_1, x_2) = 2500 - \frac{1}{75} x_1 \cdot x_2 \\ u.d.N. & 2x_1 + 3x_2 = 2200 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2200 - 2x_1 - 3x_2 = 0 \\ & 3x_1 - x_2 = 0 \\ NNB. & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

c) Die LAGRANGEfunktion ist die Zielfunktion plus das λ-fache der umgeformten Nebenbedingungen:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \;=\; 2500 - \frac{1}{75}x_1 \cdot x_2 + \lambda_1 \cdot (2200 - 2x_1 - 3x_2) + \lambda_2 \cdot (3x_1 - x_2)$$

d) Bestimmung sämtlicher partiellen Ableitungen der LAGRANGE-Funktion:

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) \;=\; 2500 - \frac{1}{75}x_1 \cdot x_2 + \lambda_1 \cdot (2200 - 2x_1 - 3x_2) + \lambda_2 \cdot (3x_1 - x_2)$$

$$\begin{aligned}
L'_{x_1}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) &= -\frac{1}{75}x_2 - 2\,\lambda_1 + 3\lambda_2 \\
L'_{x_2}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) &= -\frac{1}{75}x_1 - 3\,\lambda_1 - 1\lambda_2 \\
L'_{\lambda_1}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) &= 2200 - 2x_1 - 3x_2 \\
L'_{\lambda_2}(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) &= 3x_1 - x_2
\end{aligned}$$

e) Zur Bestimmung der kritischen Punkte müssen nun diese partiellen Ableitungen gleich Null gesetzt werden:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{75}x_2 - 2\,\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 \qquad (I) \\
-\frac{1}{75}x_1 - 3\,\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 \qquad (II) \\
2200 - 2x_1 - 3x_2 &= 0 \qquad (III) \\
3x_1 - x_2 &= 0 \qquad (IV)
\end{aligned}$$

Lösen wir nun (IV) nach x_2 auf, so erhalten wir

$$3x_1 - x_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_2 \;=\; 3x_1}$$

Dieses setzen wir nun in (III) ein und erhalten

$$2200 - 2x_1 - 3x_2 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2200 - 2x_1 - 3 \cdot 3x_1 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$2200 - 11x_1 \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_1 \;=\; 200} \quad \Rightarrow \boxed{x_2 \;=\; 3 \cdot 200 = 600}\,,$$

womit der kritische Punkt $x^* = \binom{200}{600}$ gefunden ist.

f) Zum Bestimmung der LAGRANGE-Multiplikatoren setzen wir den kritischen Punkt $x^* = \binom{200}{600}$ in (I) und (II) ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
(I) \quad -\frac{1}{75}x_2 - 2\,\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 0 &\Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{75}\cdot 600 - 2\,\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\
&& \Leftrightarrow\quad & -8 - 2\,\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(II) \quad -\frac{1}{75}x_1 - 3\,\lambda_1 - \lambda_2 &= 0 &\Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{75}\cdot 200 - 3\,\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\
&& \Leftrightarrow\quad & -\frac{8}{3} - 3\,\lambda_1 - \lambda_2 = 0
\end{aligned}$$

Wir haben also folgendes Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned}
&& -2\,\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 8 \\
-3\,\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{8}{3} \quad &\Leftrightarrow & -9\,\lambda_1 - 3\lambda_2 &= 8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-2\,\lambda_1 + 3\lambda_2 &= 8 \qquad (Ia) \\
-9\,\lambda_1 - 3\lambda_2 &= 8 \qquad (IIa)
\end{aligned}$$

$(IIa) + (Ia)$ ergibt:

$$\begin{aligned}
-11\,\lambda_1 &= 16 \qquad \Leftrightarrow \\
\lambda_1 &= -\frac{16}{11}
\end{aligned}$$

Dies eingesetzt in (Ia) liefert:

$$\begin{aligned}
-2\cdot\left(-\frac{16}{11}\right) + 3\lambda_2 = 8 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{32}{11} + 3\lambda_2 = \frac{88}{11} \\
&\Leftrightarrow \quad 3\lambda_2 = \frac{56}{11} \\
&\Leftrightarrow \quad \lambda_2 = \frac{56}{33}
\end{aligned}$$